Domácí úkol ze cvičení 7:

1. Dokažte následující tvrzení :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

   b) Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \le b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

2. Pomocí tvrzení 1.b) dokažte :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n) = \infty$ (zde dokažte také pomocí definice) ;

   b) Víte-li, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, vypočítejte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3. Vypočítejte limity:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^3-3n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-3)^n+n!}{-2^n+3\cdot n!}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+(-1)^n n!}{-2^n+3\cdot n!}$;

   d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\dots\dots+\frac{1}{n^2+n}\right)$;

   a e) ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\dots\dots\frac{1}{n+\sqrt{n-1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$.